NTMF036

INTERPRETACE KVANTOVÉ MECHANIKY

Feynmanova formulace KM

Pavel Krtouš

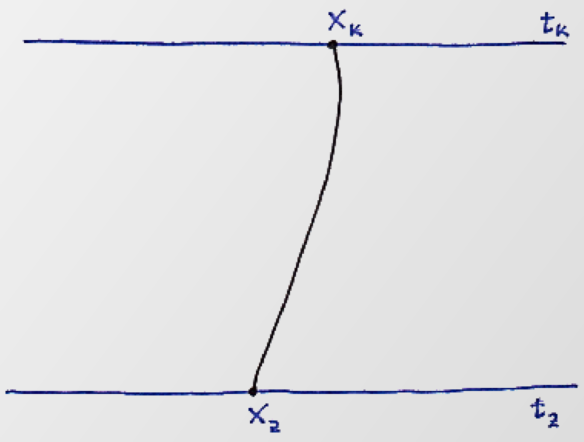
Historie

- potlačuje se pojem stavu, základní pojem je *historie*
- historie – výrok o možném vývoji systému
  - časová sekvence omezení na vývoj systému
- nejjednodušší realizace:
  - elementární historie = trajektorie
  - historie = množina trajektorií

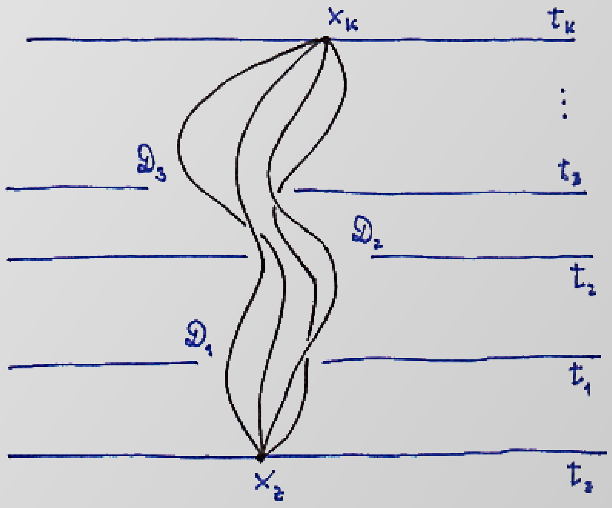
Historie bodové částice

- elementární historie = trajektorie částice
- historie = množina trajektorií

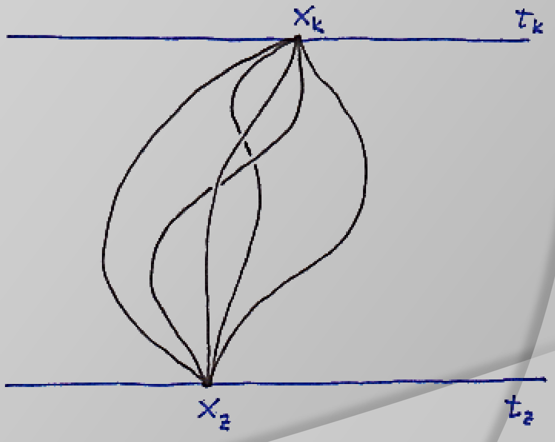
(např. trajektorie $x(t)$ splňující $x(t_z) = x_z, x(t_1) \in \mathcal{D}_1, x(t_2) \in \mathcal{D}_2, \ldots, x(t_k) = x_k$)



elementární historie



historie



historie omezená
pouze koncovými body

Historie jako výrok

- historie lze chápat jako výrok o vývoji systému
- cíl kvantové mechaniky je ocenit ‚*pravdivost*' výroků
- ocenění pouze pravděpodobnostní
- pravděpodobnost lze chápat jako ‚*jistotní funkce*'

Kvantová rozlišitelnost

- výrok lze ocenit pouze pokud odpovídá výsledku realizovaného experimentálního uspořádání
- ocenit lze pouze kvantově rozlišitelné historie
- kvantová rozlišitelnost = elementární pojem nahrazující kolaps

Pravidla pro pravděpodobnosti a amplitudy

1. **pravděpodobnosti kvantově odlišitelných disjunktních jevů se sčítají**

   $P(\boldsymbol{H}_1 \cup \boldsymbol{H}_2) = P(\boldsymbol{H}_1) + P(\boldsymbol{H}_2)$ $\quad \boldsymbol{H}_1 \cap \boldsymbol{H}_2 = \emptyset$ $\quad \boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2$ kvantově odlišitelné

2. **pravděpodobnost minimálního kvantově odlišitelného jevu je kvadrát amplitudy**

   $P(\boldsymbol{H}) = |A(\boldsymbol{H})|^2$ $\quad \boldsymbol{H}$ minimální kvantově odlišitelný

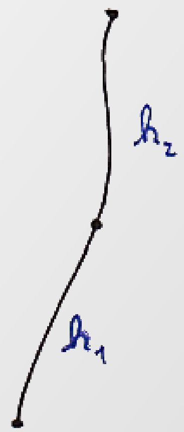
3. **amplitudy disjunktních jevů se sčítají**

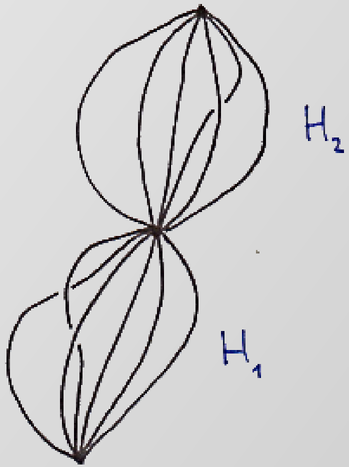
   $A(\boldsymbol{H}_1 \cup \boldsymbol{H}_2) = A(\boldsymbol{H}_1) + A(\boldsymbol{H}_2)$ $\quad \boldsymbol{H}_1 \cap \boldsymbol{H}_2 = \emptyset$

Pravidla pro pravděpodobnosti a amplitudy

4. **amplitudy následných jevů se násobí**

   $A(\boldsymbol{H}_1 \odot \boldsymbol{H}_2) = A(\boldsymbol{H}_1)A(\boldsymbol{H}_2)$ $\qquad$ $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2$ navazující historie





5. **amplitudy nezávislých jevů se násobí**

   $A(\boldsymbol{H}_1 \otimes \boldsymbol{H}_2) = A(\boldsymbol{H}_1)A(\boldsymbol{H}_2)$ $\qquad$ $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2$ historie nezávislých systémů

Pravidla pro pravděpodobnosti a amplitudy

6. **amplituda elementární historie je dána exponenciálou akce**

   $\mathcal{D}A(\boldsymbol{h}) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(\boldsymbol{h})\right)\,\mathcal{D}\boldsymbol{h}$ $\qquad$ $\boldsymbol{h}$ elementární historie

Akce

trajektorie $x(t) \quad \rightarrow \quad S(x) \in \mathbb{R}$

$$S(x) = \int_{t_z}^{t_k} L(x, \dot{x})\, dt$$

v nerelativistickém kontextu

$$L = K - V$$

$L =$ kinetická energie $-$ potenciální energie

Akce

- princip extrémální akce

klasicky realizované trajektorie $\bar{x}(t)$

$$\Updownarrow$$

extrém akce

$$\delta S(\bar{x}) = 0$$

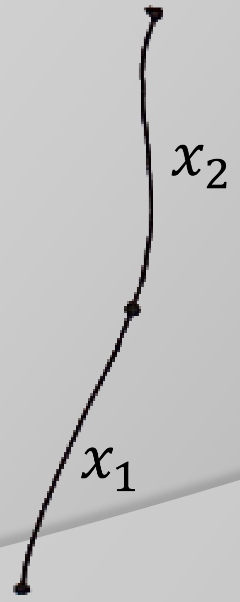
Akce

- aditivita akce

$$S(x) = \int_{t_z}^{t_k} L(x, \dot{x})\, dt$$

navazující trajektorie

$$S(x_2 \odot x_1) = S(x_2) + S(x_1)$$



Pravidla pro pravděpodobnosti a amplitudy

6. **amplituda elementární historie je dána exponenciálou akce**

$\mathcal{D}A(\boldsymbol{h}) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(\boldsymbol{h})\right)\mathcal{D}\boldsymbol{h}$ $\quad$ $\boldsymbol{h}$ elementární historie

navazující trajektorie

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}S(\boldsymbol{h}_2 \odot \boldsymbol{h}_1)\right)\mathcal{D}\boldsymbol{h} = \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(\boldsymbol{h}_2)\right)\mathcal{D}\boldsymbol{h}_2\ \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(\boldsymbol{h}_1)\right)\mathcal{D}\boldsymbol{h}_1$$

Pravidla pro pravděpodobnosti a amplitudy

3. **amplitudy disjunktních jevů se sčítají**
6. **amplituda elementární historie je dána exponenciálou akce**

$\mathcal{D}A(\boldsymbol{h}) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(\boldsymbol{h})\right)\mathcal{D}\boldsymbol{h}$ $\qquad$ $\boldsymbol{h}$ elementární historie

$$\Downarrow$$

amplituda historie je dána dráhovým integrálem

$$A(\boldsymbol{H}) = \int_{\boldsymbol{h}\in\boldsymbol{H}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(\boldsymbol{h})\right)\mathcal{D}\boldsymbol{h}$$

Pravidla pro pravděpodobnosti a amplitudy

1. **pravděpodobnosti kvantově odlišitelných disjunktních jevů se sčítají**

   $P(H_1 \cup H_2) = P(H_1) + P(H_2)$ $\quad H_1 \cap H_2 = \emptyset$ $\quad H_1, H_2$ kvantově odlišitelné

2. **pravděpodobnost minimálního kvantově odlišitelného jevu je kvadrát amplitudy**

   $P(H) = |A(H)|^2$ $\quad H$ minimální kvantově odlišitelný

3. **amplitudy disjunktních jevů se sčítají**

   $A(H_1 \cup H_2) = A(H_1) + A(H_2)$ $\quad H_1 \cap H_2 = \emptyset$

4. **amplitudy následných jevů se násobí**

   $A(H_1 \odot H_2) = A(H_1)A(H_2)$ $\quad H_1, H_2$ navazující historie

5. **amplitudy nezávislých jevů se násobí**

   $A(H_1 \otimes H_2) = A(H_1)A(H_2)$ $\quad H_1, H_2$ nezávislé systémy

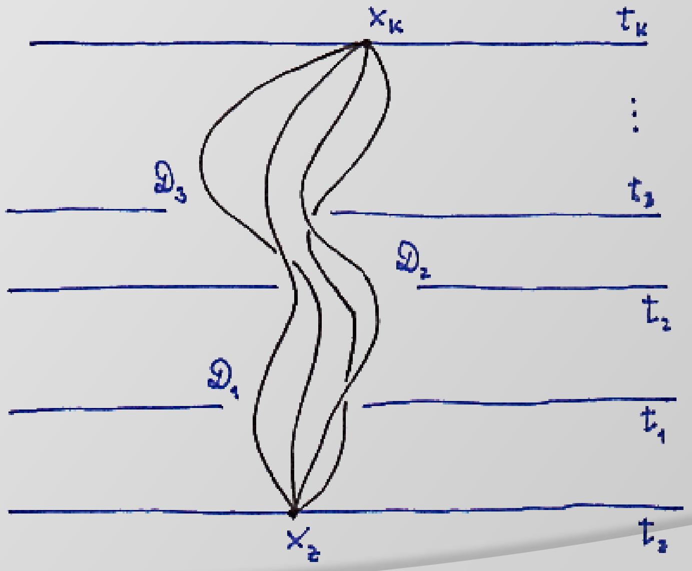
6. **amplituda elementární historie je dána exponenciálou akce**

   $\mathcal{D}A(h) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(h)\right)\mathcal{D}h$ $\quad h$ elementární historie

Dráhový integrál

- amplituda historie

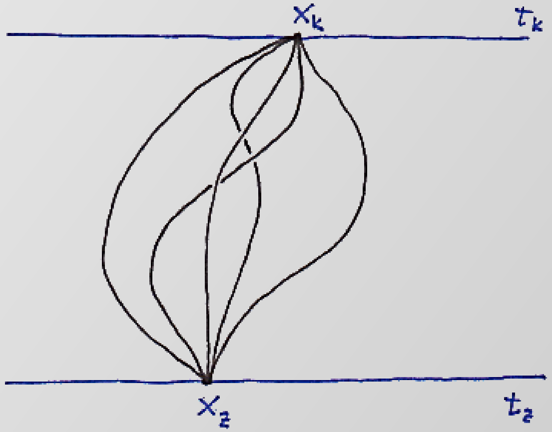
$$A(\boldsymbol{H}) = \int\limits_{x \in \boldsymbol{H}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(x)\right) \mathcal{D}x$$



Volná amplituda

- amplituda historie dané pouze koncovými body

$$A(x_k|x_z) = \int_{x:x_z \to x_k} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(x)\right) \mathcal{D}x$$

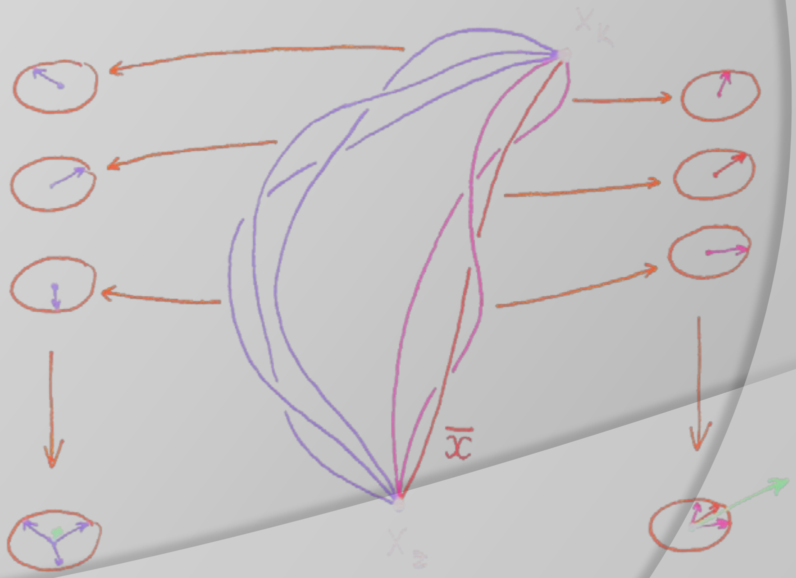


Princip extrémní akce z kvantové mechaniky

- volná amplituda

$$A(t_k, x_k | t_z, x_z) = \int_{x: x_z \to x_k} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(x)\right) \mathcal{D}x$$

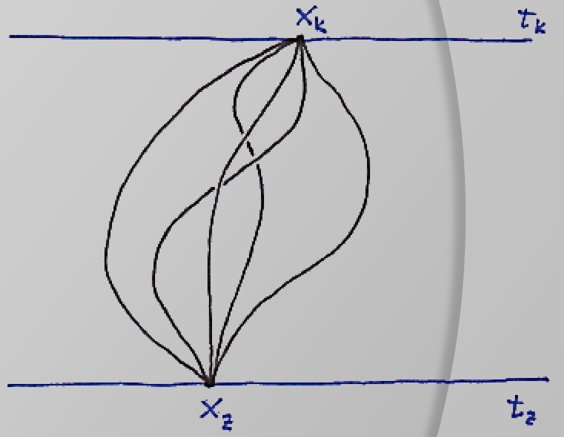
- klasický režim
  - $S \gg \hbar \quad \Rightarrow$ rychle oscilující integrál
  - příspěvky blízkých trajektorií se ruší
  - výjimkou jsou trajektorie blízké k extrémní trajektorii
  - klasická trajektorie dává dominantní příspěvek



Volná nerelativistická částice

- amplituda historie dané pouze koncovými body

$$A(t_k, x_k | t_z, x_z) = \int_{x: x_z \to x_k} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(x)\right) \mathcal{D}x$$



- Lagrangián volné nerelativistické částice

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

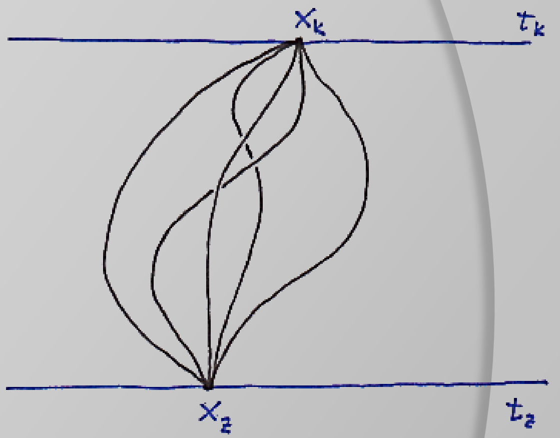
- amplituda

$$A(t_k, x_k | t_z, x_z) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar i (t_k - t_z)}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{1}{2} m \frac{|x_k - x_z|^2}{t_k - t_z}\right)$$

Amplitudy a Schrödingerova rovnice

- volná amplituda řeší Schrödingerovu rovnici

$$i\hbar\frac{d}{dt}A(t,x|t_z,t_k) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x A(t,x|t_z,t_k)$$



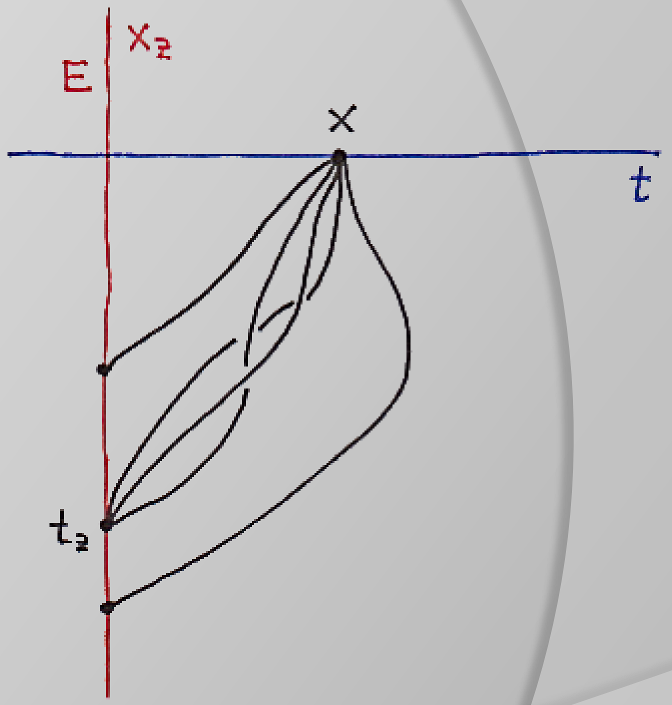
- volná amplituda lze interpretovat jako vlnová funkce

$$A(t,x|t_z,t_k) = \langle \text{pol } t_k : x_k | \text{pol } t_z : x_k \rangle$$

Amplituda částice s danou energií

- částice emitovaná s energií E v bodě x_z
  - trajektorie začínající v bodě x_z v libovolném čase t_z
  - amplituda emise $\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et_z\right)dt_z$
  - amplituda konce v čase t v bodě x

$$A(t,x|E,x_z) = \int_{-\infty}^{t} A(t,x|t_z,x_z)\, e^{-\frac{i}{\hbar}Et_z}\, dt_z$$



- amplituda

$$A(t,x|E,x_z) = \frac{\mathrm{m}}{2\pi i\hbar}\frac{1}{|x-x_z|}\exp\left(\frac{i}{\hbar}p_E|x-x_z| - \frac{i}{\hbar}Et\right)$$

$$p_E = \sqrt{2mE}$$